第14卷第4期　　数　学　进　展　　Vol.14, No.4
1985年10月　　ADVANCES IN MATHEMATICS　　Oct., 1985

网 络 几 何[①]

陈 省 身

引言

Poincaré 曾发表过两篇关于平移曲面的文章[10,11]，属于他的少数著名文章之列。下面我想说明，他所讨论的这个问题，是一个吸引人的值得进一步研究的课题。

1. Lie 关于双重平移曲面的定理及其发展

R^3中的平移曲面M由下列参数方程组定义：

$$x^\lambda = f^\lambda(u) + g^\lambda(v) \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant 3) \tag{1}$$

这里 x^λ 为 R^3中的坐标，f^λ 与 g^λ 为任意光滑函数。立即可以看出，u 曲线（v 曲线）的切线与 v（u）无关，而且在无穷远平面上定义了一条曲线 $C_u(C_v)$。

若平移曲面M还有第二个表达式，即也可由方程组

$$x^\lambda = h^\lambda(s) + k^\lambda(t) \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant 3) \tag{2}$$

给出，使得方程组

$$f^\lambda(u) + g^\lambda(v) - h^\lambda(s) - k^\lambda(t) = 0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 3) \tag{3}$$

中恰有两个是独立的，则称M为双重平移曲面。1882年，S.Lie 证明了下述著名定理[7]：

如果M是 R^3中的双重平移曲面，则在无穷远平面上由四簇参数曲线的切线定义的四条曲线 C_u, C_v, C_s, C_t，属于同一条四次代数曲线。

这个定理表明，在一个曲面上泛函方程组（3）的解可以由一种代数构造产生出来。Lie 的证明利用了超定偏微分方程组的可积性条件。事实上，从（1）我们有

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u \partial v} = 0 \tag{4}$$

这表明两簇参数曲线构成一个共轭网，亦即它们在各点的切线方向把渐近方向调和地分开。若曲面M用非参数形式给出：

$$z = z(x, y),$$

则相应的条件由下述方程表示：

---

① 1983年11月5日收到。原题：Web geometry. 译自 Bulletin (New Series) *of the American Mathematical Socitty*, *Vol*.6, *Number* 1, *January*, 1982, 1—8.

1982年9月陈省身教授曾在北大作过"网络几何"的精采报告，其内容基本上取材于这篇文章——译注

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$R(p,q)r+Q(p,q)s+T(p,q)t=0 \tag{6}$$

其中

$$p=z_x,q=z_y,r=z_{xx},s=z_{xy},t=z_{yy} \tag{7}$$

对于双重平移曲面M，除了满足(6)外，还要满足另一个方程

$$R'(p,q)r+Q'(p,q)s+T'(p,q)t=0. \tag{6'}$$

研究方程组(6)和(6′)的可积性条件会遇到一些冗长而乏味的计算，特别是要处理z的四阶偏导数。这个工作是一项眞正的tour de force（力气活儿——译注），但是Lie达到了他的目标。

Poincaré很快认识到Lie的工作的重要性，而且他还敏锐地看出Lie的工作与Abel函数之间的联系。在[10,11]中，他对Lie的定理给出了两个证明，但不是基于偏微分方程，而是根据Abel函数和代数几何①．尽管这些证明也许不够完善，但是Poincaré却引进了一些有创见的想法和新的观点。作为Poincaré工作的一个推论，双重平移曲面可以通过使θ函数等于零来定义。因此，曲面

$$x_1x_2x_3=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \tag{8}$$

就是一双重平移曲面，这里$a_i(i=1,2,3)$为常数。Darboux利用留数理论，对Lie的定理给出了最好的证明[5]。

应当注意，Lie研究平移曲面是通过他关于极小曲面的工作而开始的。Monge已经知道，解析极小曲面就是一张平移曲面(1)，其参数曲线为极小曲线或迷向曲线。

Lie继续研究了高维的情形。R^{n+1}中的平移流形是由参数方程组

$$x^\lambda=\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}f^\lambda(u\alpha)\quad(1\leqslant\lambda\leqslant n+1) \tag{9}$$

定义的超曲面，上式中x^λ为R^{n+1}中的坐标，f^λ为各个变元的光滑函数。Lie曾试图决定所有的双重平移超曲面，而且在一篇长文[8]中解决了$n=3$的情形。在同一篇文章中，他说过要回到一般的情形。他的遗作中有几篇关于这一问题的文章，但并没有获得令人满意的结论[9]．Poincoré也曾考虑过高维的情形。是Wirtinger在1938年应用射影簇的周炜良坐标才完全解决了这个问题[14]．下面我们将说明，网络几何为使这个课题能够充分展开提供了广阔的场所。

泛函方程组蕴含一个代数结构，这是一个强有力的结论。1975年B.St.Donat利用这个结论给出了Torelli定理的一个新证明。该定理说，紧致Riemann面由它的周期（或者，更精确地说由它的极化Jacobi簇）所决定，至多可能相差一同构。

① Lie对Poincaré的插足感到不悦，他说："这位作者（指Poincaré）在其它领域内的成就，没有任何人比我更了解，遗憾的是他却没有能理解我的研究工作。我只能说，他关于平移曲面及平移流形的工作中所论述的结论，完全是我的一般定理的特殊情形"．(Ges.Abh, Bd II.Teil II，527.)——原注

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2. BLaschke—Bol 的网络几何[2]

网络几何是1926—1927年在意大利海滨初露头角的，那时 W.Blaschke 与 G.Thomsen 认识到，由曲线构成的平面三叶状构形具有局部不变量。在这种情形，出色的几何图形是六边形（图 1）。对于任一点 O 以及过 O 的第一条曲线上任何邻近的点 P，当所有这样的六边形都封闭时，这种网络称为六边形网络。Thomsen 曾证明六边形网络局部同胚于三簇平行线。

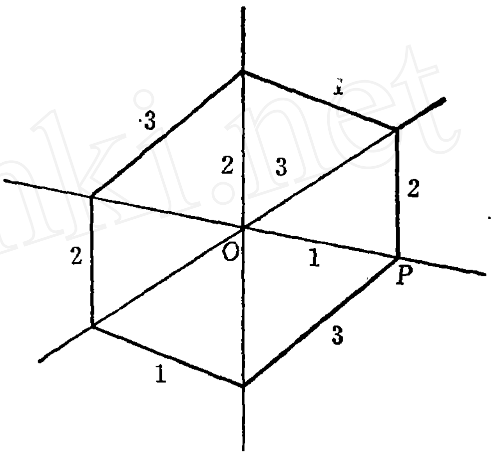

图 1

这个课题与代数几何的关系是显然的。在 Blaschke 与 Thomsen 开始搞他们的网络几何工作之前，Graf 与 Sauer 在1924年曾证明了一个定理，用网络几何的语言可以表述如下：若六边形网络的曲线均为直线，则必为同一条三次代数曲线的切线。

一般而言，平面上的 d-网络定义为该平面的一个邻域中由曲线构成的 d 个叶状构形。使得通过每一点，这 d 个叶的切线彼此不同。若 x，y 为平面上的坐标，d-网络可以由

$$u_i(x,y)=\text{const}.\quad 1\leqslant i\leqslant d \tag{10}$$

定义。我们将假定函数 $u_i(x,y)$ 是光滑的，并且满足 $\text{grad}u_i\neq 0$ 的条件。

形如

$$\sum_{1<i<d} f_i(u_i)du_i=0 \tag{11}$$

的方程叫做 Abel 方程。线性无关的 Abel 方程的最大个数，称为该网络的秩，记为 π。可以证明

$$\pi\leqslant\frac{1}{2}(d-1)(d-2) \tag{12}$$

容易看到，$d=3$ 时秩为 1 的网络恰为六边形网络。对于 $d=4$，我们有 $\pi\leqslant3$，而且秩为 3 的 4-网络满足三个线性无关的 Abel 方程

$$\sum f_i^\lambda(u_i)du_i=0\quad(1\leqslant\lambda\leqslant3) \tag{13}$$

若令

$$x^\lambda=\int f_1^\lambda(u_1)du_1+\int f_2^\lambda(u_2)du_2=-\int f_3^\lambda(u_3)du_3-\int f_4^\lambda(u_4)du_4\quad(1\leqslant\lambda\leqslant3) \tag{14}$$

就得到 R^3 中的双重平移曲面。Lie 的定理可以解释为：秩为 3 的4-网络局部等价于一个由直线构成的网络；因而后者必为一条四次代数曲线的切线。

深刻的问题乃是：是否有最大秩 $(d-1)(d-2)/2$ 的任何 d-网络皆局部等价于其叶状物皆为直线的网络。Bol 曾给出过秩为 6 的5-网络的例子，说明情况并不尽然。Bol 的例子是

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由无三个顶点共线的四个线束以及第五组是过四个顶点的二次曲线所构成的。六个 Abel 方程中有一个含有超越函数，即 Euler 的（Dilogarthms）函数①这个函数在一些近代数学的研究中，例如奇数维的非欧氏空间中单形的体积，组合四维流形的 Pontrjagin 数，以及更一般地，在代数K理论中都起一定作用，主要的理由谅必是它满足 Abel 方程这一事实。关于最近的工作，请参阅[15]。

3.高维的网络几何

R^N中的$N-k$维d-网络就是R^N中的一个邻域U中由$N-k$维子流形构成的d个叶状物；k叫做这一个网络的余维数。作为例子，考虑m维射影空间p^m中的k维d次代数簇V。一个$m-k$维线性子空间p^{m-k}与V相交于d个点，过其中每一点有$\infty^{k(m-k)}$个p^{m-k}。这就在p^m中由所有p^{m-k}构成的 Grassmann 流形$G(m-k,m)$中给出了d个$k(m-k)$维叶状物。由于

$$\dim G(m-k,m)=k(m-k+1),$$

代数簇V产生$G(m-k,m)$中的d个余维数为k的叶状物，$G(m-k,m)$局部而言就是R^{kn}，$n=m-k+1$。为了放眼于代数几何，我们将基于这个例子，只考虑R^N中余维数为k的网络，这里$N=kn$。即使如此，这一课题也是射影代数簇的几何的一种广泛的推广．正如内蕴代数簇推广为 Kähler 流形与复流形一样，这样推广到网络几何看来是合理的。

过点$x\in R^{kn}$的d个叶的切空间，给出R^{kn}在x处的切空间T_x中的d个余维数为k的线性子空间，或者也可以说，给出余切空间T_x^*中d个k维线性子空间Ω_i。我们假定，这d个线性子空间处于一般位置。对于$k=1$来说，其意义是清楚的：T_x^*的那d条直线中任何$kn=n$条都不在T_x^*的同一超平面上。对于$k>1$，必须引进正确的概念。在[4]中，我们引进了

---

① 所谓 Dilogarithms 函数系指函数

$$L_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=-\int_0^z\frac{\log x}{x}\,dx=\int_0^z\frac{dx}{x}\int_0^x\frac{d\zeta}{1-\zeta}$$

它是 Euler 在1768年首先发现的，后来 Abel，Legendre，Kummer 及 C.J.Hill 等人对它都做过深入的研究，而且"Dilogarithms"就是 Hill 后来根据上式中最后一等号，即$L_2(z)=\int_0^z\frac{dx}{x}\int_0^x\frac{d\zeta}{1-\zeta}$，而命名的。

恒等式

$$L_2(e^{2i\theta})=\frac{\pi^2}{6}-\theta(\pi-\theta)+2i\text{Л}(\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

给出了更为精确的关系式，式中（θ）是 Lobachevsky 函数，它的定义由下式给出

$$\text{Л}(\theta)=-\int_0^\theta\log|2\sin u|\,du=\frac{1}{2}\sum\frac{(\sin 2n\theta)}{n^2}$$

但实际上，最为有用的乃是

$$\text{Л}(\theta)=\theta\left(1-\log|2\theta|+\sum\frac{B_n^{2n}(2\theta)}{2n(2n+1)!}\right),\quad(|\theta|\leqslant\pi)$$

上式中$B_1=\frac{1}{6}$，$B_2=\frac{1}{30}$，…为 Bernoulli 数。欲知其详，请参阅 J.Milnor 的文章（Bull.(N.S) *of the* A.M.S.Vol.6 No.1，1982，9—24）

有关 Dilogarithms 的进一步知识可参阅

1. *Niels.Nielson*, *Der Eulersche Dilogarithms und seine verallgemeinerungen*, *Nova Acata* 90, No.3 *Hall* 1909,
2. *L.Lewin*, *Dilogarithms and associated Functions*, 1958, ——译注

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

这样的概念，仍然是根据射影代数簇的例子。

用分析的语言来说，我们假定此网络的第 i 个叶状物由方程

$$u_{i1}(x)=\text{const},\cdots,u_{ik}(x)=\text{const},\qquad(1\leqslant i\leqslant d,x\in R^{kn})$$

定义。我们将假定诸 u 是光滑函数，满足条件

$$\Omega_i(x)=du_{i1}\wedge\cdots\wedge du_{ik}\neq 0 \tag{16}$$

对于固定的 i，函数 $u_{i1},\cdots,u_{ik}$是确定的，至多差一微分同胚，而 Ω_i也是确定的，至多差一因子。这样选择的记号就确定了上面引进的线性子空间 $\Omega_i\subset T_x^*$，称它为第 i 个网络法空间。

Abel 方程乃是形如

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d}f_i(u_{i1},\cdots u_{ik})\Omega_i=0 \tag{17}$$

的方程。线性无关的 Abel 方程的最大个数叫做网络的秩。在[4]中，我们证明了这个秩有一只依赖于 d， n， h 的上界 $\pi(d,n,k)$。这个上界是精确的。特别是在 $k=1$时，我们有

$$\pi(d,n)\underset{\text{def}}{=}\pi(d,n,1)=\frac{1}{2(n-1)}\{(d-1)(d-n)+s(n-s-1)\}$$

式中 s 定义为

$$s=-d+1\quad \text{mod} n-1\qquad(0\leqslant s\leqslant n-2) \tag{19}$$

数 $\pi(d,n)$在代数几何中具有重要意义，事实上．Castelnuovo 曾证明 $\pi(d,n)$ 是 P^n中不属于任何超平面 P^{n-1}的 d 次代表曲线的最大亏数。任对偶空间 P^{*n}中取这样一条曲线 C^*，通过 P^n的每一点，我们有 d 个属于 C^*的超平面，并且从 Abel 定理可以推出，如此构造的 d-网络有秩 $\pi(d,n)$。谈到网络几何与代数几何的关系时，应当指出这里的网络几何是就实数域考虑的，而代数几何中相应的概念则与复数域有关。这种过渡不是垂手可得的，不过却是做得到的，主要因为我们研究的是网络几何的局部性质。

显然，一个重要问题是要决定出 R^n中具有余维数为1和最大秩是 $\pi(d,n)$的 d-网络。如果网络的叶全是超平面，则答案由 Abel 定理[6]（Graf-Sauer 与 Lie 定理的推广）的下述逆定理给出：

考虑 R^n的一个邻域中余维数为1的 d-网络，其叶状物均为超平面，使得 Abel 方程

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d}f_i(u_i)du_i=0 \tag{20}$$

成立，且诸 $f_i(u_i)\neq 0$。则这些叶属于对偶射影空间中的同一条 d 次代数曲线。

对于这一定理来说，只须有一个 Abel 方程就可以了。因此，决定性的问题乃是下述线性化问题：R^n中余维数为1且秩为 $\pi(d,n)$的 d-网络是否可以线性化，亦即它是否等价于一个以超平面为叶的网络，在§2中 Bol 的例子说明，当 $n=2$或 $n=5$时，这个问题的答案是否定的。

下面我们考虑 $n\geqslant 3$的情形。对于 $n+1\leqslant d\leqslant 2n-1$，我们得 $\pi(d,n)=d-n$。有些简单的例子表明，存在不可线性化的秩为 $d-n$ 的 d-网络，它依赖于任意函数。Lie 的双重平移超

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

曲面的情形相应于 $d=2n$；这时我们得到 $\pi(2n,n)=n+1$。对于秩为 $n+1$ 的 $2n$-网络，其 Abel 方程组

$$\sum f_i^{\lambda}(u_i)du_i=0 \quad (1\leqslant\lambda\leqslant\pi=n+1) \tag{21}$$

可以表示为

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int f_i^{\lambda}(u_i)du_i=-\sum_{n+1\leqslant i\leqslant 2n}\int f_i^{\lambda}(u_i)du_i \quad (1\leqslant\lambda\leqslant n+1) \tag{22}$$

作为(14)的推广，这些共同的表达式可以看作是双重平移超曲面在 R^{n+1} 中的坐标。

证明关于双重平移超曲面的 Lie-Wirtinger 定理的重要一步，是证明 R^n 中余维数为 1、秩为 $n+1$ 的 $2n$-网络是可线性化的，从而根据 Abel 定理的逆定理可得到 Lie-Wirtinger 定理。对于这种特殊情形，利用 Poincaré 的一个想法，线性化问题经过简单的论证可解决如下：对于 $x\in U\subset R^n$，设 $Z_i(x)$ 是 $\pi-1$ 维射影空间中的点，它的齐次坐标为 $[f_i^1(u_i),\cdots,f_i^{\pi}(u_i)]$。将 $x\in U\subset R^n$ 映入由诸 Z_i 张成的空间 $\{Z_1,\cdots,Z_d\}\subset P^{\pi-1}$ 的映射叫做 Poincaré 映射。若将 $u_1,\cdots,u_n$ 看作 U 中的局部坐标系，由(21)我们得到

$$f_1^{\lambda}(u_1)+\sum_{n+1\leqslant i\leqslant d}f_i^{\lambda}(u_i)\frac{\partial u_i}{\partial u_1}=0 \quad (1\leqslant\lambda\leqslant\pi),$$

由此推出，Z_1 为 $Z_{n+1},\cdots,Z_d$ 的线性组合，由于对任意 Z_i（替代 Z_1）类似的方程亦成立，我们有

$$\dim\{Z_1,\cdots,Z_d\}=d-n-1^{①} \tag{23}$$

在 $d=2n$，$\pi=n+1$ 的情形，Poincarè 映射将 U 中的点映入 P^n 的超平面，使得第 i 个叶变为点 Z_i。经过 Poincaré 映射后，再施行 P^n 中的对偶，就把 U 中的点变为对偶空间 P^{*n} 中的点，使得此网络的所有叶变为超平面。这就证明了线性化，从而推出 Lie-Wirtinger 定理。

对于 $n=3$ 的情形，Bol 曾证得了一个著名定理：R^3 中余维数为1且秩为 $\pi(d,3)(d\geqslant6)$ 的 d-网络是可线性化的。

Griffiths 和我曾试图将 Bol 定理推广至 R^n[3]。但到目前为止，我们只是在附加了正规性的假定下证明了这个定理。确切的叙述是：R^n 中余维数为1且秩为 $\pi(d,n)(d\geqslant n)$ 的正规 d-网络是可线性化的。有关正规性的定义，请见文献[3]。

最近几年，苏联的 M.A.Akivis 与 V.Goldberg 也做了些有关网络几何方面的工作。但是我不清楚这些工作与 Poincaré 的工作有多少联系。进一步的信息，请读者参阅[1]。

Tschebotarow 曾推广 Lie 的想法去研究关于任意 Lie 群（代替平移群）存在非本原系的曲面[13].据我所知，这方面的推广并没有得到进一步的研究。

4. 一些未解决的问题

以下我想列举几个最直接的、未解决的问题：

---

① 原式左端误为 $\{Z_1,\cdots,Z_n\}$ —译注

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1）试决定平面上，由曲线构成的具有极大秩$\frac{1}{2}(d-1)(d-2)(d\geqslant 5)$的所有 d-网络。

2）如不假定正规性，$R^n(n\geqslant 4)$中的上述线性化定理是否亦眞？

3）(Griffiths 问题) 对于R^{2k}中k维3-网络，六边形条件是有意义的。从P^{k+1}中的一个三次超曲面出发，用§3开始时所讲过的作法（$m=k+1$，从而$n=2$），定义R^{2k}中的一个k维3-网络。可以证明，这种网络是六边形的。其逆是否亦眞？亦即R^{2k}中每个六边形k维3-网络是否都可以用这种作法产生（可以差一局部微分同胚）？

附注：感谢V.Goldberg对这一问题给出了否定回答。

4）Lie的论证中，曾大量地使用了超定偏微分方程组的理论。试利用偏微分方程证明Lie-Wirtinger定理。

（刘书麟译，江嘉禾校）

参 考 文 献

[1] Akivis, M.A., Webs and almost Grassmann structures, *Soviet Math. Dokl.* 21(1980), no. 3. Further references to works by V.Goldberg and other Soviet mathematicians on the subject can be found in this paper.

[2] Blaschke, W., and Bol, G., Geometrie der Gewebe, Springer, Berlin 1938.

[3] Chern, S.S., and Griffiths P.A., *Math.Ver.*80 (1978), 13—110; also, Gorrections and Addenda, same Journal, 83 (1981), 78—83.

[4] __________, An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank, *Ann.Scuola Norm. Pisa, Serie IV*, 5 (1978), 539—557.

[5] Darboux, G., *Theorie des surfaces, t.*1 (1914), 151—161.

[6] P.A.Griffiths, Variations on a theorem of Abel, *Invent.Math.*35 (1976), 321—390.

[7] S.Lie, Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden, *Arch.für Math.Bd.*7, *Heft* 2 (1882), 155—176; also Ges.Abhandlungen. Bd.1, Abt1.450—467.

[8] __________, Das Abelsche Theorem und die Translations-mannigfaltigkeiten, Leipziger Berichte 1897, 181—248; also Ges.Abhandlungen, Bd. II, Teil II, paper XIV, 580—639.

[9] __________, Ges.Abhandlungen.Bd.7.

[10] H.Poincaré, Fonctions abeliennes, *J.Math.Pures Appl.*, Serie 5, t.1, (1895) 219—314; also Oeuvres t.IV, 384—472, in particular p.430.

[11] __________, Sur les surfaces de translation et les fonctions abeliennes, *Bull.Soc.Math.*France 29 (1901), 61—86; also Oeuvres t.VI.13—37.

[12] B.Saint-Donat, Variétés de translation et théoréme de Torelli, Comptes Rendus Paris 280 (1975), 1611—1612.

[13] N.Tschebotarow, Über Flächen welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene Kontinuirliche Transformationsgruppe enthalten, *Recueil Math.* (Sbornik) 34 (1927), 149—204.

[14] W.Wirtinger, Lies Translationsmannigfaltigkeiten und Abelsche Integrale, *Monatshefte Math.Phys.* 46 (1938), 384—431.

[15] David. B. Damiano, Webs, abelian equations, and characteristic classes, Thesis, Brown University, 1980.

[16] John B. Little. Translation manifolds and the converse of Abel's theorem, Thesis, Yale University, 1980.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net